MADENCİLİK Eylül September 1984 Cilt Volume XXIII Sayı No 3

Doğrusal Programlama ve Madenciliğe İlişkin iki Basit Örnek

Linear Programming and Two Simple Examples From Mining

A.Oktay YALGIN(*)

ÖZET

Bu yazıda yöneylem araştırmasına ana hatlarıyla değinilmiş; ve en çok kullanım alanı bulan Doğrusal Programlama Yönteminin kuramına kısaca değinilirken; basite indirgenmiş iki ayrı madencilik sorununun herbirine, üç ayrı yolla çözüm örneklemesi yapılmış ve aynı sonuca ulaşıldığı görülmüştür.

ABSTRACT

In this paper, basic operational research methods are explained briefly. Linear Programming which is the most popular method of operational research is explained. Two simple examples are given and three different solution techniques are applied and the same results, are obtained.

(*) Maden Y .Müh., ANKARA.

1. GİRİŞ

Yöneylem araştırmasının kökenleri çok eskilere gitmekle birlikte, bilinen anlamda bu tür eylemlere yöneylem araştırması denilmeye II. Dünya Savaşı sırasında başlanmıştır. Bu savaşta ilk kez kullanıldığında, İngiliz Genel Kurmay Başkanlığında Prof. Plackettin ve diğer bilim adamları, Alman savaş uçaklarına karşı öyle bir ulusal savunma sistemi oluşturmuşlardır ki, Almanlar her hücum uçuşunda yollarının İngiliz uçaklarınca kesilmiş olduğunu görmüşlerdir. Yöneylem araştırması savaşın sonlarına doğru ABD'de kullanılmaya başlanmıştır.

Savaştan sonra, bilim adamları eski görevlerine dönünce yöneylem araştırması yaygınlaşmaya ve insan, makina, malzeme ve paradan oluşan karmaşık sistemlerde ve endüstride uygulanmaya, sorunların çözümü için karar organlarına seçenekler sunulmaya başlanmış; ve *"Elde varolan olanaklardan en verimli şekilde en yüksek yararı sağlamak amacıyla girişilen bilimsel eylemler ve yöntemlerin tümüdür"* diye de tanımlanmıştır.

İnsanlığın uygarlık basamaklarına ilk adımı atması ile başlayan üretim; ekonomistlere göre fayda yaratmak, mühendislere göre ise bir fiziksel varlık üzerinde değer artırıcı değişiklik yapmak ya da ham ve yarı mamulü, mamul hale getirmektir. Fakat tanım ne olursa olsun önemli olan miktar, kalite, zaman ve maliyetin en uygununu saptamaktır. Süreç içinde bunu arayış yöntemleri çok değişmiştir. Örneğin, yüzyıl önceki ve bunların bugünkü benzeri olan küçük işletmelerde işyeri sahibinin kişiliğinde yöneticilik görevi de bütünleşmiş ve aynı kişi finans, alım-satım, üretim ve kalite denetimi vb. birçok sorunun çözüm sorumluluğu ve yetkisini üstlenmiştir. İşletmeler büyüdükçe ve sorunlar karmaşıklaştıkça değişkenler arasında seçim yapıp karar verecek yöneticiler işbaşına gelmeye başlamış ve bunlar da kendi aralarında iş bölümü ve uzmanlaşmaya yönelmişlerdir. Bu gelişmelerin yanısıra, yeni yeni teknikler ve yöntemler geliştirilmeye başlanmıştır. Yöneylem araştırmalarında bu tekniklerden en önemli ve en geniş uygulama alanı bulmuş olanlardandır.

Genellikle yöneylem araştırması; sistem yaklaşımı, meslekler arası yaklaşım ve bilimsel yöntem kullanma özelliklerini taşımaktadır. Çünkü örgütle ilgili verilen kararda, örgütü oluşturan parçaların örgüt çevresi ile olan etkileşimini gözönüne almak gerekir. Diğer yandan, değişik mesleklerdeki kişiler farklı eğitimlerden geçtiklerinden, farklı yöntemler üzerinde beceri ve farklı biçimde düşünme alışkanlıkları kazanmışlardır. Dolayısıyle bir meslek mensubu, bir olayın belli yönlerini görme, diğer yönlerini ise önemsememe alışkanlığını kazanmıştır. Bu nedenle, farklı mesleklerin o olaydaki görüşleriyle de yaklaşmak gereği doğmaktadır. Ayrıca bilimsel yaklaşmak, matematiksel model kurmak ve bu modelden, soruna benzetim yapılarak ya da matematiksel analiz- ile çözüm aranmaktadır.

2. SORUNA YAKLAŞIM

En uygun çözüm modelini bulmak için yapılan yaklaşımdaki aşa nalar şöyle sıralanabilir:

2.1. Sorunun Analizi ve Formüle Edilmesi

Sorun formüle edilirken bazı bilgilere sahip olmak gerekmektedir. Elde edilen bu bilgiler birbirleriyle jlişkilendirilerek fonksiyonel bir ilişki kurulur. Kurulan bu ilişki optimize (minimizeimaksimize) edilir. Buradaki "optimum"un anlamı, var olan koşullardaki en uygun çözümdür. Bu da, maliyet minimizasyonu ya da kar maksimizasyonu biçiminde amaçlanmaktadır.

Sorun formüle edilirken sahip olunması gereken bilgiler, sistemi etkileyen çeşitli değişkenler olup bunların bir kısmı denetlenebilir, bîr kısmı denetlenemez türdendir.

2.1.1. Denetlenebilen Değişkenler

Yöneticinin ya da yönetimin denetiminde olan ve stratejiyi etkileyen değişkenler olup, bun lan yönetici istediği biçimde değiştirebilir. Bunlar;

— Karar verici (kendisi)

— Karar vericinin amaçları,

— Denetlenebilen diğer değişkenler (X- ; j = 1,2,3. . . . .n).

2.1.2. Denetlenemeyen Değişkenler

Bu tür değişkenler yöneticinin denetimi dışında olup ortam koşullarından kaynaklanan değişkenlerdir:

. (Yp-j = 1 . 2 , 3. . . . .n)

2.1.3. Kısıtlayıcılar

Bunlar sonucu etkileyen ya da sorun yaratan öğelerdir. Bu kısıtlayıcılar ayrı bir eşitlik ya da eşitsizlikler takımı biçiminde belirtilir.

2.2. Matematiksel Modelin Kurulması

Sorun formüle edildikten sonra en iyi temsil edilebilecek matematiksel sembolik bir model kurulur.

X-: Denetlenebîlen değişkenler (Karar değişkenleri)
Yp Denetlenemeyen değişkenler (Parametreler)
f : X: ile Y; arasındaki ilişki ise,

$$M=f(X_j, Y_j)$$

olarak ifade edilir. Genel olarak amaç, M değerini optimum yapan X; değerinin saptanmasıdır. Kısıtlayıcılar ise yukarıda değinildiği gibi X-| > 0, X_2 X); X_3 >0 olmak koşuluyla eşitlik ya da eşitsizlikler takımı biçiminde belirtilir.

2.3. Modelin Çözümü

Modeldeki değişkenlerin, optimum çözüm ya da optimuma en yakın çözüm biçiminde saptanmasıdır.

2.4. Çözümün Kanıtlanması ve Değerlendirilmesi

Model kurulup bir çözüm elde edildikten sonra, modelin gerçek durumu yansıtıp yansıtmadığı denenip kanıtlanır. Çelişkili bir durum varsa nedeni araştırılır. Genellikle bu nedenler, modelin soruna etkisi olmayan bazı değişkenleri içermesinden ya da tam tersi, önemli bazı değişkenleri içermemesinden, ayrıca değişkenlerin sağlıklı olmamasından ve model yapısının hatalı olmasından kaynaklanabilir.

2.5. Sonucun Kabulü ve Uygulamaya Konması

3. YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINDA KULLANILAN YÖNTEMLER

Yazımızın asıl konusunu Doğrusal Programlama oluşturmakla birlikte, yöneylem araştırmasında kullanılan diğer önemli yöntemleri belirtmekte yarar vardır. Bu yöntemler; Kuyruk Kuramı, Stok Modelleri, Oyun Kuramı, Danışma Kuramı, Graflar Kuramı, Stokastik Yöntemler, Kritik Yol Yöntemi, Yenileme ve Seçeneklerin Karşılaştırılması Yöntemi vb. kuram ve yöntemlerdir.

4. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Doğrusal Programlama, yöneylem araştırmasının en yaygın uygulanan yöntemlerinden biridir. Temeli, matematiğin en eski kuramlarından olan *Aynı Anda Çözülebilir Eşitsizlikler'e* dayanmaktadır. Ancak, matematiksel bir programlama olarak geçmişi yenidir. Doğrusal programlamanın ilk ve ayrıntılı kuramsal tartışması matematikçi L.V. Kantorovich tarafından yapılmıştır. Bugünkü anlamıyla yorumu ise matematikçi G.B. Dantzig 1947 yılında yapmıştır. Dantzig'in bu yorum ve çalışmaları J .V. Nevmann, L. Hurwichz ve T.C. Koopmans gibi ekonomist ve matematikçiler* tarafından desteklenmiş ve bugün *"Simpleks"* adıyla tanımlanan yönteme ulaşılmıştır, özellikle gelişen bilgisayar olanakları, bu tekniği bugün işletmelerin her aşamasında çok karmaşık olabilen sorunların çözümünde dahi başarı ile kullanılabilir duruma getirmiştir.

Doğrusal programlama, belli doğrusal eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşullar altında doğrusal bir amaç fonksiyonunu optimumlaştırmak biçiminde tanımlanabilir. Buradaki optimumlaştırma, belli bir amaca en düşük maliyetle ulaşmak ya da belli kaynaklarla en yüksek kârı sağlamak anlamındadır.

Bir sorunun doğrusal programlama yöntemi ile çözülebilmesi için; değişkenlerin rakamlarla ifadelenmesi, değişkenler arasında seçenek (alternative) seçim olanağı bulunması ve uygulanacak sorunun kısa devreli olması gerekir. Bütünüyle matematiksel temellere dayanan ve ulaşılan sonuçlarda kişisel etkileri ortadan kaldıran doğrusal programlamadaki doğrusallık, matematiksel modelde kullanılan eşitlik ya da eşitsizlik takımlarının ve aynı zamanda amaç fonksiyonunun 1. derece olmasından kaynaklanmaktadır. Diğer yandan doğrusal programlamanın birözelfiği de, matematikte (n) tane bilinmeyen, birbirinden bağımsız (n) tane doğrusal denklemle çözülebildiği halde, doğrusal programlamada (n) tane bilinmeyenin (n)'den daha az denklemle çözülebilir olmasıdır.

Doğrusal programlamanın 3 ana unsuru vardır:
— Amaç Fonksiyonu
— Kısıtlama Fonksiyonları
— Pozitif Kısıtlama

4.1. Amaç Fonksiyonu

Doğrusal programlamada amaç fonksiyonu kâr maksimizasyonu ya da maliyet minimizasyonu olur. Bu amaç fonksiyon;

$$z_{mak/min} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$ şeklinde tanımlanır.

Burada;

Z : Amaç fonksiyonu
Xj : Değişkenler 0': 1,2,3,.... n)
Cj : Sabit katsayılar (j: 1,2,3,.... n)'dir.

4.2. Kısıtlayıcı Fonksiyonlar

Bilindiği gibi işletmeler eylemlerini, örneğin makinaların kapasitesi, işgücü ya da finansman gibi birtakım kısıtlayıcı kaynak ve koşullar altında sürdürürler. İşte böyle a_y ve b- sabit katsayılar olmak üzere;

Maksimizasyon (kâr) sorununda:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leqslant b_i \ , (i: 1, 2, 3, ... m)$$

Minimizasyon (Maliyet) sorununda ise:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geqslant b_i \ , (i: 1, 2, 3, ... m)$$

biçiminde ifade edilir.

Buna karşın örneğin, beslenme sorunlarında ya da makinaların sürekli tam kapasitede çalıştırılma durumlarında ya da sınırlı hammadde miktarı olan durumlarda,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \ , (i: 1, 2, 3, ... m)$$

durumundan söz edilir.

4.3. Pozitif Kısıtlama

İşletmeler ya üretimde bulunurlar ya da bulunmazlar. Bu nedenle, değişkenler sıfıra eşittir ya da pozitif 'dir. Negatif olamazlar. X- *>0,* (j: 1,2,3 ....n)

Bu ifadeler toplu olarak gösterilirse:

Amaç Fonksiyonu:

$$mak/min = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

Kısıtlayıcılar:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_nX_n\ (\leqslant,=,\geqslant) b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n\ (\leqslant=\geqslant) b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n\ (\leqslant=\geqslant) b_m \end{aligned}$$

Pozitif Kısıtlama:

$X_1 \geqslant 0,\ X_2 \geqslant 0, ... X_n \geqslant 0$ olarak tanımlanır.

Bu ifade matris notasyonu ile gösterildiğinde;

Fiyat Vektörü:

$$c = [C_1, C_2, ... C_n]_{(1xn)}$$

Karar Değişkenleri Vektörü:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}_{(nx1)}$$

Teknolojik Matris:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}_{(mxn)}$$

Gereksinme (Kaynak) Vektörü:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}_{(mx1)}$$ olduğundan,

Amaç Fonksiyon:

$$Z = (C_1, C_2, ... C_n)_{(1xn)} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}_{(nx1)}$$

ya da $Z = C . X$ olur.

Kısıtlayıcılar:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}_{(mxn)} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}_{(nx1)} \begin{matrix} \leqslant \\ = \\ \geqslant \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}_{(mx1)}$$

Yada

$A.X < b$, $A.X > b$

Pozitif kısıtlama ise,

$X: > 0$ biçiminde yazılır.

özetlenirse;

Z: Maksimize (kâr) ya da minimize (maliyet) edilecek arraç fonksiyonudur.

a»:Bir birim mal için gerekli olan masrafları gösteren katsayılardır. Pozitif, negatif ya da sıfır olabilir.

aj: > 0 ise üretimdeki girdileri gösterir. Yani, j eyleminde tüketilen i'nin miktarıdır.

a» <0 ise üretimdeki çıktıları gösterir. Yani, j eyleminde üretilen i'nin miktarıdır.

aj- =0 ise j eyleminde i'nin hiçbir etkisi olmuyor anlamındadır.

bji Gereksinme (kaynak) kısıtı öğeleridir.

b; >0 ise girdi olarak kullanılan i malının miktarıdır.

bj < 0 ise çıktı olarak kullanılan i malının miktarıdır.

C: : Fiyat vektörü

X: : Değişkenler vektörü

5. DOĞRUSAL PROGRAMLAMANIN UYGULAMASINA İLİŞKİN ÖRNEK

Basit, örnekleme çözümde biri maksimizasyon ve diğeri minimizasyon olan iki ayrı sorunun, sırasıyla Grafiksel, Simpleks ve Dualité ile çözümleri yapılmış ve her üç yöntemle de aynı sonuca ulaşıldığı görülmüştür.

5.1. örnek 1

Bir maden işletmesi iki ayrı tenörde cevher üretmektedir. Her iki kalite cevher de üç aşamada üretilmektedir, (örneğin, delme ve patlatma, yükleme ve taşıma, zenginleştirme vb.) 1. Kalite cevherin ton üretiminde ilk aşamada sırasıyla 2, 1, 1 zaman biriminde ve 2. kalite cevherin ton üretiminde ise sırasıyla 1,1,3 zaman biriminde üretim gerçekleştirilmektedir. Diğer yandan 1. aşamanın aylık en fazla çalışabilme kapasitesi 700 zaman birimi, ikinci aşamanın en fazla çalışabilme kapasitesi 400 zaman birimi ve üçüncü aşamanın ise 900 zaman birimi olduğu; 1. kalite cevher 4000 TL/ton ve 2. kalite cevher 6000 TL/ton kâr bıraktığı ve her iki cevher için de herhangi bir pazar sorunu olmadığı varsayımına göre, işletme *kârını en yüksek* yapabilmek için bu iki kalite cevherin herbirinden kaçar ton üretim gerçekleştirilmelidir?

Çözüm:

Sorun bir maksimizasyon sorunudur. O halde;

Amaç Fonksiyonu:

$$Z_{mak} = 4000\,X_1 + 6000\,X_2$$

Kısıtlayıcılar:

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &< 700 \\ X_1 + X_2 &< 400 \\ X_1 + 3X_2 &< 900 \end{aligned}$$

Pozitif Kısıtlama:

$$X_1 > 0 \;,\; X_2 > 0$$

5.1.1. Grafiksel Çözüm

Kısıtlayıcı eşitsizlikler eşitlikler haline getirildikten sonra,

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &= 700 \quad (1) \\ X_1 + X_2 &= 400 \quad (2) \\ X_1 + 3X_2 &= 900 \quad (3) \end{aligned}$$

(1), (2) ve (3) denklemlerinin ortak çözümü ile Şekil 1'deki grafik çizilirse, olası çözüm alanı (ABCDO) olur.

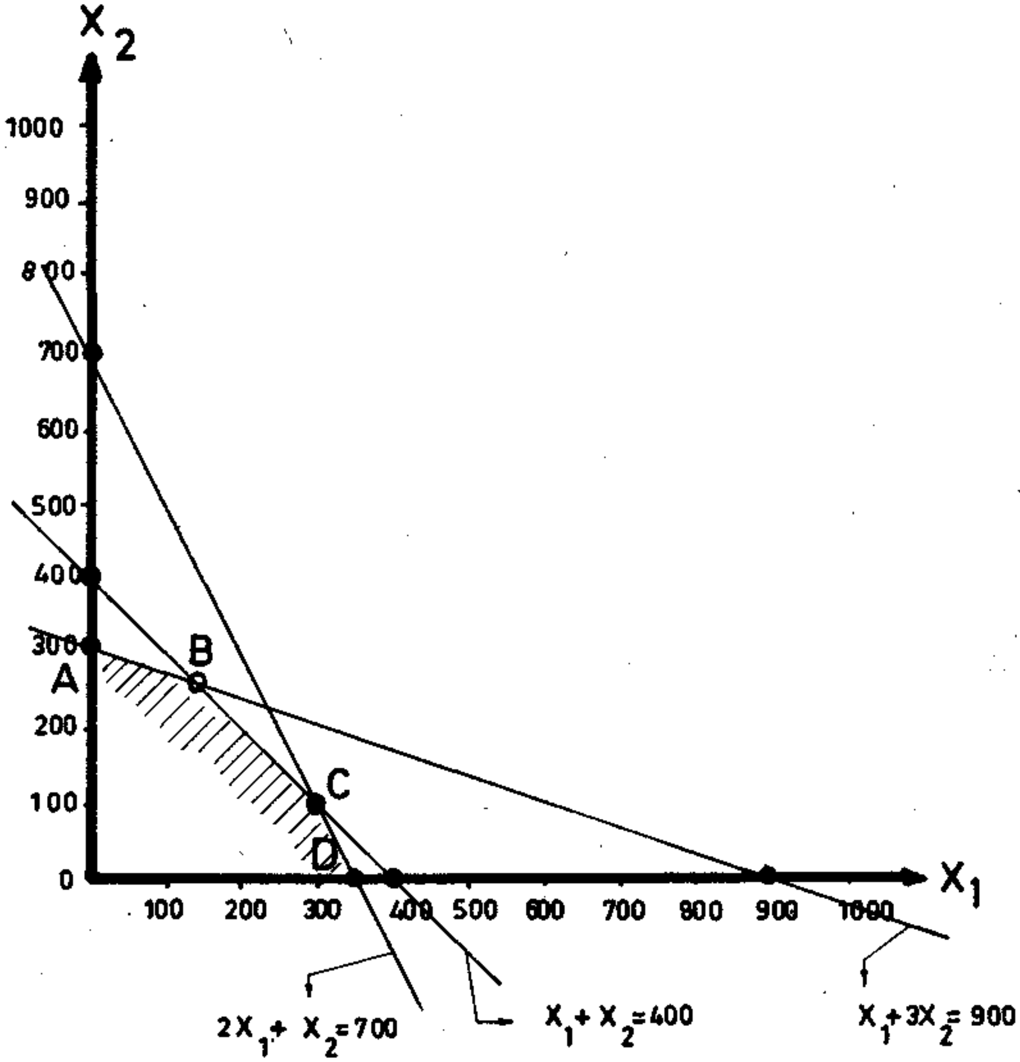
Bu alanın noktaları için amaç fonksiyonu irdelenirse;

A (0,300)
$$Z_{mak} = 4000 \times 0 + 6000 \times 300 = 1800000$$

B (150,250)
$$Z_{mak} = 4000 \times 150 + 6000 \times 250 = 2100000$$

C (300,100)
$$Z_{mak} = 4000 \times 300 + 6000 \times 100 = 1800000$$

D (350,0)
$$Z_{mak} = 4000 \times 350 + 6000 \times 0 = 1400000$$



Şekil 1 — Olası Çözüm Alanı

Görüldüğü gibi maksimum noktayı B noktası vermektedir. Dolayısıyle çözüm B noktasının koordinatları olan değerlerdir. Yani;

$X_1 = 150$, $X_2 = 250$ ve $Z_{mak} = 2100000$

bulunur.

5.1.2. Simpleks Çözüm

Simpleks çözüme geçmeden önce bu çözüm yönteminin aşamaları kısaca özetlenirse;

i) Eşitsizlikler eşitlik haline dönüştürülerek Çizelge 1 'de görülen simpleks çizelgesi düzenlenir. Bu eşitlik haline dönüştürme, maksimizasyon için artık değişkenler ve minimizasyon için ise artık ve yapay değişkenlerin ilavesi ile yapılır.

Çizelge 1 - Simpleks Çizelgesi

K.K.	C_j		Ç.V.
M.K.	TDV		
		katsayı matrisi / birim matris	
Z_j			
$C_j - Z_j$			

K.K. : Kâr Katsayısı TDV : Toplam Değişken Vektör
C.V. : Çözüm Vektörü , M.K. : Maliyet Katsayısı

ii) Z- satırı hesaplanır. Bunun için-kâr katsayıları sütunu ile katsayılar matrisi, birim matris ve çözüm vektörü sütunundaki sayılar çarpılır ve alt alta toplanır.

iii) (Cj - Zj) satırı hesaplanır (Z= satırındaki değerler Cj satırındaki değerlerden çıkarılır.)

iv) Maksimizasyon sorunlarında çizelgedeki (C: - Zj) satırındaki pozitif işaretli katsayılar arasından en büyüğü seçilir. Simpleks tablosuna girilen bu kolona "Anahtar Kolon" denir. Ve temel değişken vektörüne hangi değişkenin gireceğini saptar.

Minimizasyon sorunlarında ise simpleks çizelgesine (C: — Zj) satırındaki negatif işaretli, temel olmayan değişkenler arasındaki en küçük değerden girilir.

v) Çözüm vektöründeki değerlerle seçilen kolondaki değişken katsayılar arasındaki oranlar bulunur. Bu oranlar içinde sıfır ve negatif olanlar dikkate alınmadan en küçüğü seçilir. Bu en küçük değerin bulunduğu satıra da "Anahtar Satır" denir. Ve temel değişken vektöründen hangi değişkenin çıkacağını saptar.

vi) Anahtar kolonla anahtar satırın kesiştiği yerdeki "Anahtar Sayı" bulunur.

vii) Anahtar sayı, bulunduğu satırdaki bütün sayılara teker teker bölünerek yeni çözüm vektörü ve diğer öğeler bulunur.

viii) Diğer satırların ve (G - Zj) satırının yeni öğeleri ise;

(Eski satır öğeleri) - (Satırın anahtar kolondaki sayısı) x (Anahtar satırın yeni öğeleri) =Yeni satır öğeleri

formülüne göre teker teker saptanır.

ix) Maksimizasyon sorunlarında (Cj — Zj) satırında bulunan bütün katsayılar sıfır, ya da negatif işaretli ise optimal çözüme ulaşılmıştır. Ve sonuç çözüm vektöründedir. Aksi takdirde (Cj — Zj) satırındaki sayılar negatif ya da sıfır olana dek devam edilir.

Minimizasyoı* sorunlarına ise, (Cj - Zj) satırirftfaKF &tttün elemanlar sıfır ya da pozitif işaretli ise optimal çözüme ulaşılmıştır. Değilse, (Cj - Zj) satırındaki sayıların tümünün sıfır ya da pozitif olana dek işlemlere aynen devam edilir.

Şimdi örneğimizin çözümüne dönersek;

Amaç Fonksiyon:

$$Z_{mak} = 4000 \ . \ X_I + 6000X_2$$

Kısıtlayıcılar:

$$2X_i + X_2 < 700$$
$$X_t + X_2 \cdot < 400$$
$$X_! + 3X_2 < 900$$

Pozitif Kısıtlama;

$$X_I > 0, \quad X_2 > 0$$

Artık değişkenler kullanarak eşitsizlikleri eşitlik halinde yazılırsa,

$$2X_X + X_2 + X_3 = 700$$
$$X_I + X_2 \ . \ + X_4 = 400$$
$$X_I + 3X_2 \ \bullet \ +^{*}\bullet \ + X_5, = 900$$

Amaç Fonksiyon ise,

$$^{z}mak = 4000Xi + 6000X_2 + 0.X_3 + 0.X_4 + 0.X_5$$

olur.

Artık değişkenlerden yararlanılan bu durum matris notasyonunda gösterilirse,

$$\begin{vmatrix} 2\,1\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,3\,0\,0\,1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 700 \\ 400 \\ 900 \end{vmatrix}$$

olur. O halde simpleks çizelgesini düzenlersek (Çizelge 2),

Çizelge 2 — Simpleks Çizelgesi

K,K	C_j	4000	6000	0	0	0	Ç.V	
	TDV	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
0	X_3	2	1	1	0	0	700	
0	X_4	1	1	0	1	0	400	A.S
0	X_5	1	3	0	0	1	900	←
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		4000	6000	0	0	0	0	
			↑ A.K					

AK : Anahtar Kolon
AS : Anahtar Satır

Örneğimiz bir maksimizasyon sorunu olduğundan (Cj - Z-) satırındaki pozitif işaretli katsayılar arasından en büyüğü olan 6000 değeri seçilir. Bu kolon anahtar kolondur ve temel değişken vektörüne girecek değişken X_2'dir.

Anahtar satır ise;

700/1 =700,400/1 =400,900/3 =300 oranlarının en küçüğü olan 300'ü veren üçüncü satır olup anahtar sayı 3 ve temel değişken vektöründen çıkacak olan değişken de X_s'dir.

Anahtar satırın yeni öğeleri:

X_2 (X_5):

1/3=1/3, 3/3=1, 0/3=0, 0/3=0, 1/3=3, 900/3 =300 olur.

Diğer satırların yeni öğeleri:

X_4

$1 - 1\,(1/3) = 2/3$
$1 - 1\,(1) = 0$
$0 - 1\,(0) = 0$
$1 - 1\,(0) = 1$
$0 - 1\,(1/3) = -1/3$
$400 - 1\,(300) = 100$

X_3

$2 - 1\,(1/3) = 5/3$
$1 - 1\,(1) = 0$
$1 - 1\,(0) = 1$
$0 - 1\,(0) = 0$
$0 - 1\,(1/3) = -1/3$
$700 - 1\,(300) = 400$

$C_j - Z_j$

$4000 - 6000\,(1/3) = 2000$
$6000 - 6000\,(1) = 0$
$0 - 6000\,(0) = 0$
$0 - 6000\,(0) = 0$
$0 - 6000\,(1/3) = -2000$
$0 - 6000\,(300) = -1800000$

Bu hesaplamaların sonucunda Çizelge 3 elde edilir.

Çizelge 3 – Simpleks Çizelgesi

K.K	C_j	4000	6000	0	0	0	Ç.V	
	TDV	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
0	X_3	5/3	0	1	0	-1/3	400	
0	X_4	2/3	0	0	1	-1/3	100	← A.S.
6000	X_2	1/3	1	0	0	1/3	300	
$C_j - Z_j$		2000	0	0	0	-2000	↓ 1.800.000	
		↑ A.K.						

En büyük (C_j - Z_j) değeri =2000 olan kolon anahtar kolondur.

400/5/3 = 240, 100/2/3 = 150,

300/1/3 = 900 olup ikinci satır anahtar satırdır. Bu durumda:

X_1 (X_4):

$2/3/2/3 = 1$, $0/2/3 = 0$, $0/2/3 = 0$, $1/2/3 = 3/2$ $-1/3/2/3 = -1/2$, $100/2/3 = 150$

X_3

$5/3 - 5/3\,(1) = 0$
$0 - 5/3\,(0) = 0$
$1 - 5/3\,(0) = 1$
$0 - 5/3\,(3/2) = -5/2$
$-1/3 - 5/3\,(-1/2) = 1/2$
$400 - 5/3\,(150) = 150$

X_2

$1/3 - 1/3\,(1) = 0$
$1 - 1/3\,(0) = 1$
$0 - 1/3\,(0) = 0$
$0 - 1/3\,(3/2) = -1/2$
$1/3 - 1/3\,(-1/2) = 1/2$
$300 - 1/3\,(150) = 250$

$C_j - Z_j$

$2000 - 2000\,(1) = 0$
$0 - 2000\,(0) = 0$
$0 - 2000\,(0) = 0$
$-0 - 2000\,(-3/2) = -3000$
$-2000 - 2000\,(-1/2) = -1000$
$-1800000 - 2000\,(150) = -2100000$

Çizelge 4 – Simpleks Çizelgesi

K.K	C_j	4000	6000	0	0	0	Ç.V
	TDV	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	0	0	1	-5/1	1/2	150
4000	X_1	1	0	0	3/2	-1/2	150
6000	X_2	0	1	0	-1/2	1/2	250
$C_j - Z_j$		0	0	0	-3000	-1000	↓ 2.100.000

Çizelge 4'de görüldüğü gibi (Cj - Z=) satırındaki öğelerin hepsi sıfır ya da negatif olduğundan çözüme ulaşılmıştır.

$X_1 = 150, \quad X_2 = 250$

$Z_{mak} = 4000 \cdot 150 + 6000 \cdot 250 = 2100000$

bulunur. Nitekim çizelgede çözüm vektöründe yukarıdan aşağı doğru bu değerler görülmektedir.

5.1.3. Dualité Çözüm

Dual modelde kısıtlayıcıların adedi primal modefdekinden daha azdır. Ve bu nedenle de çözümü daha kolaydır. Her primal maksimizasyon sorununun düali minimizasyon; ve de her primal minimizasyon sorununun düali maksimizasyondur. Dolayısiyle kısıtlayıcıların eşitsizlik yönleri değişir.

Dual model, primal modelin katsayı matrisinin transpozesinin bulunmasiyle oluşturulur. Primal modelin kısıtlayıcı sabitleri düal modelin amaç fonksiyonunun katsayıları olur. Primal modelin amaç fonksiyonu katsayıları ise düalin kısıtlayıcı sabitleri otur.

örnekteki primal model:

$Z_{mak} = 4000 X_1 + 6000 . X_2$

$2X_1 + X_2 < 700$
$X_1 + X_2 < 400$
$X_1 + 3X_2 < 900$

$X_1 > 0, \quad X_2 > 0$

olduğundan, düali;

Amaç fonksiyon:

$Z'_{min} = 700.Y_1 + 400.Y_2 + 900.Y_3$

Kısıtlayıcılar:

$2Y_1 + Y_2 + Y_3 > 4000$
$Y_1 + Y_2 + 3Y_3 > 6000$

Pozitif Kısıtlama:

$Y_1 > 0, \quad Y_2 > 0, \quad Y_3 > 0$

otur.

Artık ve yapay değişkenler kullanarak eşitsizlikleri eşitlersek;

$2Y_1 + Y_2 + Y_3 + S_1 + . + Y_4 + . \quad = 4000$
$Y_1 + Y_2 + 3Y_3 + \cdot + S_2 + \cdot + Y_5 = 6000$

Amaç fonksiyon:

$Z'_{min} = 700\, Y_1 + 400 Y_2 + 900 Y_3$
$+ 1000 S_1 + 1000 S_2 + 0.Y_3 + 0.Y_4$

Çizelge aşağıdaki şekilde düzenlenir (Çizelge 5):

$Y_3 (S_2)$.

1/3, 1/3, 1, 0, 1/3, 0, -1/3, 2000

S_1

2 - 1 (1/3) = 5/3
1 - 1 (1/3) = 2/3
1 - 1 (1) = 0
1 - 1 (0) = 1 *
0 - 1 (1/3) = -1/3
- 1 - 1 (0) = - 1
0 - 1 (-1/3) = 1/3
4000 - 1 (2000) = 2000

$c_j - z_j$

-2300 + 3100 (1/3) = -3800/3
-1600 + 3100 (1/3) = -1700/3
-3100 + 3100 (1) = 0
0 + 3100 (0) = 0
0 + 3100 (1/3) = 3100/3
1000 + 3100 (0) = 1000
1000 + 3100 (-1/3) = -100/3
-10000000 + 3100 (2000) = -3 800 000

Bu değerlere göre Çizelge 6 oluşturulur.

Çizelge S — Simpleks Çizelgesi

M.K	C_j / TDV	700 Y_1	400 Y_2	900 Y_3	1000 S_1	1000 S_2	0 Y_4	0 Y_5	Ç.V	
1000	S_1	2	1	1	1	0	-1	0	4000	A.S.
1000	S_2	1	1	2	0	1	0	-1	6000	←
Z_j		3000	2000	4000	1000	1000	-1000	-1000	10.000.000	
$C_j - Z_j$		-2300	-1600	-3100	0	0	1000	1000	10.000.000	
				↑ A.K.						

Çizelge 6 – Simpleks Çizelgesi

M.K	C_j / TDV	700 Y_1	400 Y_2	900 Y_3	1000 S_1	1000 S_2	0 Y_4	0 Y_5	Ç.V	
1000	S_1	5/3	2/3	0	1	-1/3	-1	1/3	2000	A.S
900	Y_3	1/3	1/3	1	0	1/3	0	-1/3	2000	
$C_j - Z_j$		-3800/3	-1700/3	0	0	3100/3	1000	-1000/3	-3.800.000	

A.K.

$Y_1(S_1)$:

$5/3/5/3 = 1, \quad 2/3/5/3 = 2/5, \quad 0/5/3 = 0, \quad 1/5/3 = 3/5, \quad -1/3/5/3 = -1/5, \quad -1/5/3 = -3/5,$
$1/3/5/3 = 1/5, \quad 2000/5/3 = 1200$

Y_3	$C_j - Z_j$
$1/3 - 1/3\,(1) = 0$	$-3800/3 + 3800/3\,(1) = 0$
$1/3 - 1/3\,(2/5) = 1/5$	$-1700/3 + 3800/3\,(2/5) = -60$
$1 - 1/3\,(0) = 1$	$0 + 3800/3\,(0) = 0$
$0 - 1/3\,(3/5) = -1/5$	$0 + 3800/3\,(3/5) = 760$
$1/3 - 1/3\,(-1/5) = 2/5$	$3100/3 + 3800/3\,(-1/5) = 780$
$0 - 1/3\,(-3/5) = 1/5$	$1000 + 3800/3\,(-3/5) = 240$
$-1/3 - 1/3\,(1/5) = -2/5$	$-100/3 + 3800/3\,(1/5) = 220$
$2000 - 1/3\,(1200) = 1600$	$-3800000 + 3800/3\,(1200) = -2280000$

Bu değerlere göre Çizelge 7 oluşturulur.

Çizelge 7 – Simpleks Çizelgesi.

M.K	C_j / TDV	700 Y_1	400 Y_2	900 Y_3	1000 S_1	1000 S_2	0 Y_4	0 Y_5	Ç.V	
700	Y_1	1	2/5	0	1	-1/5	-3/5	1/5	1200	A.S
900	Y_3	0	1/5	1	-1/5	2/5	1/5	-2/5	1600	
$C_j - Z_j$		0	-60	0	760	780	240	220	-2.280.000	

A.K

$Y_2\,(Y_1)$:

$1/2/5 = 5/2, \quad 2/5/2/5 = 1, \quad 0/2/5 = 0, \quad 1/2/5 = 5/2, \quad -1/5/2/5 = -1/2,$

$-3/5/2/5 = -3/2, \quad 1/5/2/5 = 1/2, \quad 1200/2/5 = 3000$

Y_3	$C_j - Z_j$
$0 - 1/5\,(5/2) = -1/2$	$0 + 60\,(5/2) = 150$
$1/5 - 1/5\,(1) = 0$	$-60 + 60\,(1) = 0$
$1 - 1/5\,(0) = 1$	$0 + 60\,(0) = 0$
$-1/5 - 1/5\,(5/2) = -7/10$	$760 + 60\,(5/2) = 910$
$2/5 - 1/5\,(-1/2) = 1/2$	$780 + 60\,(-1/2) = 750$
$1/5 - 1/5\,(-3/2) = -1/2$	$240 + 60\,(-3/2) = 150$
$-2/5 - 1/5(1/2) = -1/2$	$220 + 60\,(1/2) = 250$
$1600 - 1/5\,(3000) = 1000$	$-2280000 + 60\,(3000) = -2\,100\,000$

Bu değerlere göre Çizelge 8 oluşturulur.

Çizelge 8 — Simpleks Çizelgesi

M.K	C_j / TDV	700 Y_1	400 Y_2	900 Y_3	1000 S_1	1000 S_2	0 Y_4	0 Y_5	Ç.V
400	Y_2	5/2	1	0	5/2	-1/2	-3/2	1/2	3000
900	Y_3	-1/2	0	1	-7/10	1/2	1/2	-1/2	1000
C_j-Z_j		150	0	0	910	750	150	250	-2.100.000

$Y_1=0, \quad Y_2=3000, \quad Y_3=1000$

$$Z'_{mak}=700\times 0+400\times 3000+900\times 1000$$
$$=2100000$$

bulunur.

Dikkat edilirse, (C_j-Z_j) satırındaki Y_4 ve Y_5 kolonlarındaki (150 ve 250 değerleri) primal modeldeki X_1 ve X_2 gerçek çözüm değerlerini vermektedir.

5.2. örnek II

. Bir maden işletmesinin birbirine yakın A ve B ocakları vardır. İşletmenin bu ocaklardan çıkardığı cevher yüksek, orta ve düşük tenörlü olmak üzere üçe ayrılmaktadır. İşletme, yaptığı satış sözleşmesi gereği haftada;

360 ton yüksek tenörlü,

480 ton orta tenorlu,

340 ton düşük tenörlü cevheri teslim etmek zorunluluğundadır. A ocağının günlük maliyeti 300000 TL, B ocağının ise 500000 TL'dır. İşletme bu maliyetlerle bir günde A ocağından,

60 ton/gün yüksek tenörlü,
40 ton/gün orta *tenörlü* ve

40 ton/gün düşük tenörlü cevher üretmektedir.

B ocağından ise;

40 ton/gün yüksek tenörlü,
80 ton/gün orta tenörlü ve

40 ton/gün düşük tenörlü cevher üretmektedir. İşletme, satış sözleşmesinde yükümlenen tonajı teslim edebilmenin yanışıra *en düşük maliyeti* gerçekfeştirebilmek amacıyla ocakları haftada kaç gün çalıştırmalıdır?

Çözüm:

Soruñ bir minimizasyon sorunudur.

Amaç Fonksiyon:

$$Z_{min}=300000.X_1+500000.X_2$$

Kısıtlayıcılar:

$$50X_1+40X_2\geqslant 360$$
$$40X_1+80X_2\geqslant 480$$
$$40X_1+40X_2\geqslant 340$$

Pozitif Kısıtlama:

$$X_1\geqslant 0,\ X_2\geqslant 0$$

5.2.1. Grafiksel Çözüm

Kısıtlayıcı eşitsizlikleri eşitlik haline getirip üçünün ortak çözümünden Şekil 2'deki grafik çizilebilir. Şekilden görüldüğü gibi olası çözüm alanı taralı olan sağ taraftır.

A (Q>Q) noktas| jçin:

z^ = 300000 x 0 + 500000 x 9 - 4500000

B (1, 7,5) noktası için:

Z_{min} = 300000 x 1 + 500000 x 7,5 = 4050000

C{5,3,5) noktası için:

z = 300000 x 5 + 500000 x 3,5 = 3250000

D (12,0)^nûktası için:

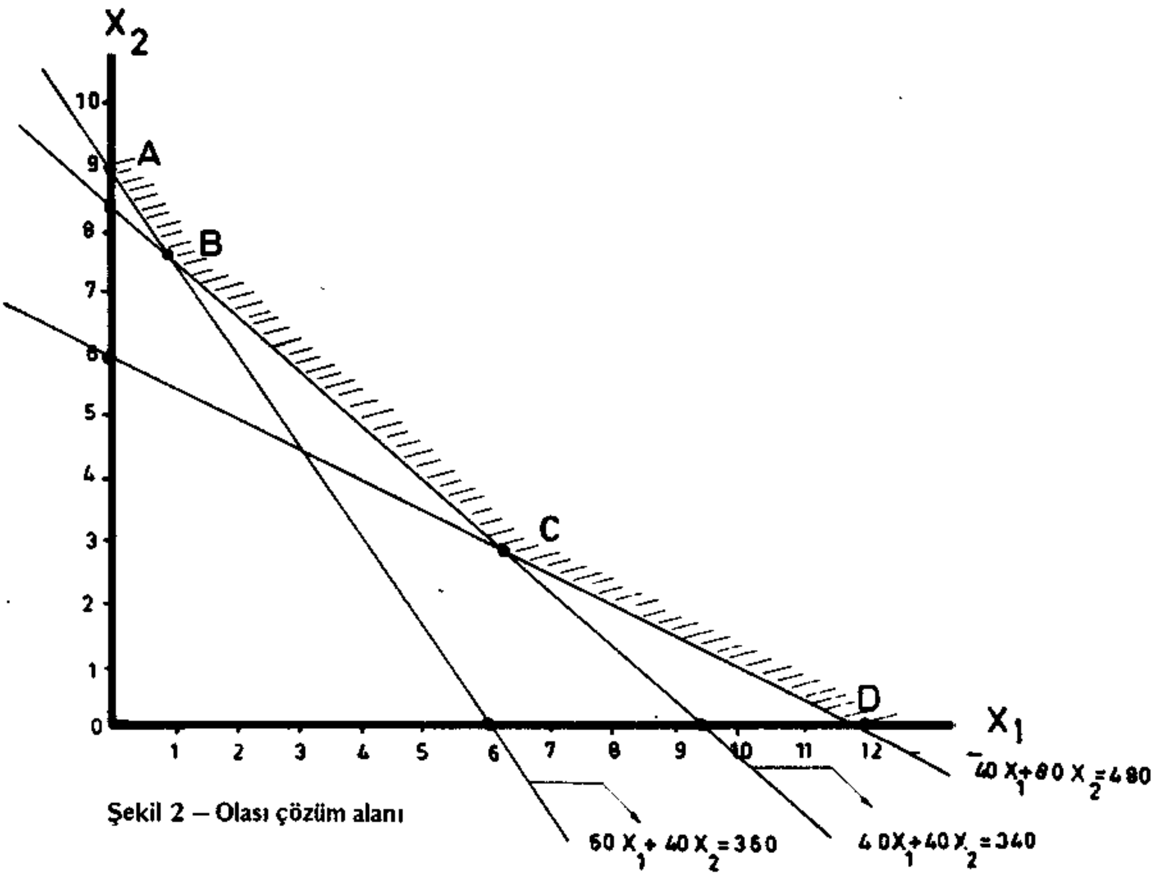
Z_{min} = 300000 x 12 + 500000 x 0 = 3600000

hAjwr Minimum değeri yalmz C(5;3 5) noktas, verdıg.nden çozum C noktasının -koordinattandır. Yani;

$X_1=5, \quad X_2=3,5$

$Z_{min}=3250000$

bulunur.



Şekil 2 — Olası çözüm alanı

5.2.2. Simpleks Çözüm

Kısıtlayıcı eşitsizlikleri eşitlik haline dönüştürürken artık değişkenlerin yanısıra yapay değişkenler de kullanarak;

$$60X_1 + 40X_2 + S_1 + \cdot + \cdot + X_3 = 360$$
$$40X_1 + 80X_2 + \cdot + S_2 + \cdot + \cdot + X_4 = 480$$
$$40X_1 + 40X_2 + \cdot + \cdot + S_3 + \cdot + \cdot + X_5 = 340$$

Amaç fonksiyon:

$$Z_{min} = 300\,000\,X_1 + 500\,000\,X_2 + 1\,000\,000\,S_1 + 1\,000\,000\,S_2 + 1\,000\,000\,S_3 + 0.X_3 + 0.X_4 + 0.X_5$$

olacaktır. Bu durumu matris notasyonunda gösterirsek;

$$\begin{bmatrix} 60 & 40 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 40 & 80 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 40 & 40 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360 \\ 480 \\ 340 \end{bmatrix}$$

olur. O halde simpleks çizelgesini düzenlersek (Çizelge 9),

Çizelge 9 — Simpleks Çizelgesi

M.K	C_j / TDV	300.000 X_1	500.000 X_2	1.000.000 S_1	1 000 000 S_2	1 000 000 S_3	0 X_3	0 X_4	0 X_5	Ç V	
1.000.000	S_1	60	40	1	0	0	-1	0	0	360	
1.000.000	S_2	40	80	0	1	0	0	-1	0	480	←
1.000.000	S_3	40	40	0	0	1	0	0	1	340	A S
Z_j		140.000.000	160.000.000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	-1 000 000	-1 000 000	-1 000 000	1 180 000 000	
$C_j - Z_j$		-139.700.000	-159.500.000	0	0	0	1 000 000	1 000 000	1 000 000	-1 180 000 000	
			↑ A.K								

En küçük $(C_j - Z_j)$ değeri = −159 500 000 olan kolon anahtar kolondur. Anahtar satır ise;

360/40 = 9, 480/80 = 60, 340/40 = 8.5 olduğundan , ikinci satır anahtar satırdır ve anahtar sayı da kesişme noktası olan 80'dir. O halde;

$\underline{X_2\ (S_2)}$:

40/80 = 1/2, 80/80 = 1, 0/80 = 0 1/80 = 1/80, 0/80 = 0, 0/80 = 0, −1/80 = −1/80, 0/80 = 0, 480/80 = 6

S_1	S_3	$C_j - Z_j$
60 − 40 (1/2) = 40	40 − 40 (1/2) = 20	−139700000 + 159500000 (1/2) = −59950000
40 − 40 (1) = 0	40 − 40 (1) = 0	−159500000 + 159500000 (1) = 0
1 − 40 (0) = 1	0 − 40 (0) = 0	0 + 159500000 (0) = 0
0 − 40 (1/80) = −1/2	0 − 40 (1/80) = −1/2	0 + 159500000 (1/80) = 1993750
0 − 40 (0) = 0	1 − 40 (0) = 1	0 + 159500000 (0) = 0
− 1 − 40 (0) = −1	0 − 40 (0) = 0	1000000 + 159500000 (0) = 1000000
0 − 40 (-1/80) = 1/2	0 − 40 (-1/80) = 1/2	1000000 + 159500000 (-1/80) = −993750
0 − 40 (0) = 0	− 1 − 40 (0) = −1	1000000 + 159500000 (0) = 1000000
360 − 40 (6) = 120	340 − 40 (6) = 100	−1180000000 + 159500000 (6) = -223000000

Yeni ögeler hesaplanarak Çizelge 10 bulunur.

Çizelge 10 - Simpleks Çizelgesi

M K.	C_j / TDV	300 000 X_1	500.000 X_2	1.000 000 S_1	1 000 000 S_2	1 000 000 S_3	0 X_3	0 X_4	0 X_5	Ç V	
1.000 000	S_1	40	0	1	1/2	0	1	1/2	0	120	← A S
500 000	X_2	1/2	1	0	1/80	0	0	1/80	0	6	
1 000 000	S_3	20	0	0	1/2	1	0	1/2	-1	100	
$C_j - Z_j$		59.950 000	0	0	1 993 750	0	1 000 000	-993 750	1 000 000	-223 000 000	
		↑ A K									

Anahtar kolon $(C_j - Z_j)$ = −59 950 000 olan kolon anahtar, satır ilk satır ve anahtar sayı da 40'dır.

O halde yeni çizelge;

Çizelge 11 – Simpleks Çizelgesi

M.K	C_j / TDV	300.000 X_1	500.000 X_2	1.000.000 S_1	1.000.000 S_2	1.000.000 S_3	0 X_3	0 X_4	0 X_5	Ç.V	
300.000	X_1	1	0	1/40	-1/80	0	-1/40	1/80	0	3	
500.000	X_2	0	1	-1/80	3/160	0	1/80	-3/160	0	9/2	
1.000.000	S_3	0	0	-1/2	-1/4	1	1/2	1/4	-1	40	← A.S
$C_j - Z_j$		0	0	1.498.750	1.244.375	0	-498.750	-244.375	1.000.000	-43.150.000	
							↑ A.K				

Anahtar kolon ve anahtar satır Çizelge 11'de gösterildiği gibi olup anahtar sayı 1/2'dir. Bunu izleyen çizelge hesapİJinırsa Çizelge 12 elde edilir.

Çizelge 12 – Simpleks Çizelgesi

M.K	C_j	300.000	500.000	1.000.000	1.000.000	1.000.000	0	0	0	Ç.V
	TDV	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	X_3	X_4	X_5	
300.000	X_1	1	0	0	-1/64	1/20	0	1/64	-1/20	5
500.000	X_2	0	1	0	13/640	-1/40	0	-13/640	1/40	7/2
0	X_3	0	0	-1	-1/8	2	1	1/8	-2	80
C_j-Z_j		0	0	1.000.000	1.182.000	997.500	0	182.031	2500	-3.250.000

$X_1 = 5$ ve $X_2 = 7/2$ bulunur. ($S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0$).

$Z_{min} = 300000\, X_1 + 500000\, X_2$

$Z_{min} = 3250000$ bulunur.

5.2.3. Düalite Çözüm

Primal modelde;

Amaç Fonksiyon:

$Z_{min} = 300000\, X_1 + 500000\, X_2$

Kısıtlayıcılar:

$$60\, X_1 + 40\, X_2 \geq 360$$
$$40\, X_1 + 80\, X_2 \geq 480$$
$$40\, X_1 + 40\, X_2 \geq 340$$

$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$

idi. O halde,

Düal model;

Amaç Fonksiyon:

$Z''_{mak} = 360\, Y_1 + 480\, Y_2 + 340\, Y_3$

Kısıtlayıcılar:

$$60\, Y_1 + 40\, Y_2 + 40\, Y_3 \leq 300000$$
$$40\, Y_1 + 80\, Y_2 + 40\, Y_3 \leq 500000$$

Pozitif Kısıtlama:

$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0\ ,\ Y_3 \geq 0$

olur.

$$\begin{bmatrix} 60 & 40 & 40 \\ 40 & 80 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300000 \\ 500000 \end{bmatrix}$$

$$60\, Y_1 + 40\, Y_2 + 40\, Y_3 + Y_4 + \cdot = 300000$$
$$40\, Y_1 + 80\, Y_2 + 40\, Y_3 + \cdot + Y_5 = 500000$$

Çizelge 13 – Simpleks Çizelgesi

K.K	C_j	360	480	340	0	0	Ç.V	
	TDV	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5		
0	Y_4	60	40	40	1	0	300.000	A.S
0	Y_5	40	80	40	0	1	500.000	←
Z_j		0	0	0	0	0	0	
C_j-Z_j		360	480	340	0	0	0	
			↑ A.K					

Anahtar kolon (G - Zj) = 480 olan kolon, anahtar satır ikinci satır ve anahtar sayı da 80'dir. Bunu izleyen çizelgeler hesaplandığında Çizelge 14,15 ve 16 elde edilir.

Çizelge 14 – Simpleks Çizelgesi

K.K	C_j	360	480	340	0	0	Ç.V	
	TDV	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5		
0	Y_4	40	0	20	1	-1/2	50.000	← A.S
480	Y_2	1/2	1	1/2	0	1/80	6.250	
C_j-Z_j		120	0	100	0	-6	-3.000.000	
		↑ A.K						

Çizelge 15 – Simpleks Çizelgesi

K.K	C_j	360	480	340	0	0	Ç.V	
	TDV	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5		
360	Y_1	1	0	1/2	1/40	-1/80	1250	← A.S
480	Y_2	0	1	1/4	-1/80	3/160	5625	
C_j-Z_j		0	0	40	-3	-9/2	-3.150.000	
				A.K ↑				

Çizelge 16 – Simpleks Çizelgesi

K.K	C_j	360	480	340	0	0	Ç.V
	TDV	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
340	Y_3	2	0	1	1/20	-1/40	2500
480	Y_2	-1/2	1	0	-1/40	1/40	5000
C_j-Z_j		-80	0	0	-5	-7/2	-3.250.000

Yi =0, Y_2 =5000, Y_3 =2500

^{z}mak = 360 x 0 +480 x 5000 + 340 x 2500 = 3.250.000 bulunur.

Diğer yandan görüldüğü gibi bu Z_{ma}|< değeri ve primal modelin X_t ve X_2 çözüm değerleri olan (5 ve 7/2) değerleri C;-Z- satırında belirmiştir.

6. SONUÇ

Gelişmiş çağdaş işletmelerde hem sorunlar karmaşıklaşmış, hem de karmaşık sorunlar çoğalmıştır. Bu karmaşık ilişkilerin çözümü ise çok geniş hacimli denklem sistemleri ile olanaklı hale gelmiş ve dolayısıyla doğrusal programlama etkin ve güçlü bir teknik olarak ön plana çıkmıştır. İş ve endüstri örgütlenmesi ile ilgili sorunların çözümünün yanısıra, bir sosyal konuya ayrılan kaynakların kullanımında da yaygın uygulama alanı bulmuştur.

Döğalki, bu yazıda örnekleme amacıyla belirtildiği gibi, gerçek yaşamdaki sorunlar yalnız X_1 ve X_2 olarak iki tane bilinmeyenin aranışı değildir. Gerçek yaşamın çok basamaklı sayılarını ve çok miktarda bilinmeyenini içeren karmaşık sistemini çözmek grafiksel yöntemle olası değildir; simpleks çözüm ise ancak çağımızda büyük hızla gelişen bilgisayarlarda değişkenlerin kolayca saptanabilmelerini sağlamaktadır. Bu da çok ucuz fiyatlarla ileriye dönük analizlerin yapılmasını olanaklı kılmaktadır. Binlerce olası çözüm olması nedeniyle, doğrusal programlama gerçekten değerli işler başarmaktadır.

KAYNAKLAR

1) ESİN, A., "Yönetimde Kantitatif Metod ve Teknikler" Ankara, 1979.

2) HICKS, H.G., "The Management of Organizations: A System and Human Resources Approach" (Çev.) Ankara, 1979.

3) HILIER, F.S., LIEBERMAN, G.J., "Operations Research" Holden Day Inc., New York, 1974.

4) KARAKOYUNLU, Y., "Doğrusal Programlama ve Oyun Teorisi" Bursa İktisadi Ticari ilimler Akademisi, Ankara, 1973.

5) KOBU, B., "Üretim Yönetimi", İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi, İstanbul, 1979.

6) OMAY, G., "Yöneylem Araştırmasına Giriş", Ankara, 1980.