

Dinamik Programlama ile Sınır Tenörü Optimizasyonu

E. Çetin

Dicle Üniversitesi Maden Mühendisliği Bölümü, Diyarbakır

ÖZET:Optimum sınır tenörü tayini, cevher ile yataş arasındaki sınırı belirlediği için, madencilikle temel bir konudur. Paranın zaman değeri ve yüksek tenörlü cevheri çıkarıp daha fa/la kar elde etmek yerine düşük tenörlü cevheri çıkarmanın getirdiği fırsat maliyeti yüzünden, sınır tenörü optimizasyonu ancak üretim dönemleri boyunca azalarak değişen bir sınır tenörü politikasıyla mümkündür. Statik bir sınır tenörü tayini, çok fazla hesaplama gerektirmeyen, basit bir işlemdir. Dinamik bir sınır tenörlü silsilesi tayini ise, bir takım optimizasyon araçları kullanımını gerektirir. Dinamik programlama, bu hususta güçlü bir optimizasyon ortamı sağlar. Bu çalışmanın amacı, en yüksek indirgenmiş karı veren optimum sınır tenörlü tespitiyle ibarettir. Maden yataşının özelliklerinden kaynaklanan fiziksel kısımlar da göz önüne alan detaylı bir maden üretim planlaması bu çalışmanın dışındadır.

ABSTRACT: Determination of optimum cut-off grades is a fundamental issue in mineral extraction as it assigns the boundaries between ore and waste over time. Because of the time value of money together with the opportunity cost of taking low grades when higher grades are still available, cut-off grade optimization is only possible with a decreasing cut-off grades policy over the life of a mine. Determination of a static cut-off grade is trivial and does not require much calculations. However, determination of a cut-off grades sequence necessitates to use optimization tools. Dynamic programming provides a strong optimization medium in this subject. The objective of this study is determining optimum cut-off grades that give maximum discounted profit. Detailed mine scheduling that includes physical constraints is beyond the scope of this work.

1 GİRİŞ

Sınır tenörü optimizasyonu, maden yataklarının değerlendirilmesini en çok etkileyen faktörlerden birisidir. Çünkü, yer kürenin bir kısmında bulunan bir miktar malzemenin işletilip işletilmeyeceğine karar vermek için sınır tenörüne bakılır.

Maden işletmelerinde, geleneksel olarak, bir sınır tenörü belirlenir ve işletme ömrü boyunca, bu sınır tenöründe cevher üretilir. Bunun sonucunda, işletme ömrü boyunca aynı kesim tenöründe çalışılacağı açıktır. Ancak, bu tür bir yaklaşım, açıktır ki, paranın zaman değerini gözardı etmektedir. Bu yüzden, statik bir sınır tenörü yerine, işletme ömrü boyunca farklı sınır tenörlerinde çalışmak üzerinde akademisyenlerce durulmaktadır.

Henning bugünkü değer maksimizasyonunun ancak azalarak değişen bir sınır tenörlü silsilesi ile mümkün olduğunu ilk olarak gösterdi (1963). İndirgeme oranının sıfırdan büyük olması durumunda, net bugünkü değerin sadece azalarak değişen bir sınır tenörlü politikası ile mümkün olduğu üzerinde durdu. Lane (1964) sınır tenörü optimizasyonunun teorik altyapısını oluşturdu. Sınır tenörü optimizasyonunun ancak azalarak değişen bir sınır tenörlü silsilesi ile mümkün olduğunu gösterdi. Taylor (1972, 1985), önceki çalışmaları

değerlendirdi ve Lane'in yaklaşımına benzer bir noktaya vardı. Çalışmalarında kapsamlı bir sınır tenörü optimizasyonu teorisi sundu.

Bir maden işletmesinin karı, işletmenin ömrü boyunca tanımlanan bir sınır tenörü silsilesinin ve buna bağlı üretim miktarının bir fonksiyonudur. Bu silsileye bağlı olarak kar değiştiğinden, optimum kar veren bir sınır tenörü silsilesi veya silsileleri bulunabilir.

Paranın zaman değeri ve bununla beraber, yüksek tenörlü cevheri çıkarıp daha fazla kar elde etmek dururken düşük tenörlü cevheri çıkarmanın getirdiği fırsat maliyeti, üretimin ilk dönemlerinde yüksek sınır tenörü ile üretim yapılması, sonraki yıllarda daha düşük sınır tenörü ile üretim yapılmasının avantajlı olduğunu gösterir. Bu faktörlerin bilim adamları tarafından farkına varılması, bir çoklarının optimal bir sınır tenörlü silsilesi tayini konusunda bir takım algoritmalar geliştirmelerine yol açmıştır (Lane, 1964; Dowd, 1976; Çetin & Dowd, 2002).

Üretim süresi boyunca sabit bir sınır tenörü ile üretim planlaması, bir madencilik operasyonunda, indirgenmemiş karı maksimize eder. Ancak amaç indirgenmiş karı maksimize etmek ise, üretimin ilk döneminde yüksek, sonraki dönemlerde ise azalarak değişen dinamik bir sınır tenörlü politikası uygulaması gerekir.

Paranın zaman değeri kavramı, filialisai analizlerde neden indirgenmiş kar yaklaşımının kullanıldığını anlamak için çok önemlidir. Bu kavram, paranın zamana bağlı olarak değişen bir faizinin olmasından kaynaklanmaktadır. Aynı zamanda, risk faktörü ile de ilgilidir. İşletmenin ilk dönemlerinde yatırım maliyetini karşılamak, sermayenin geri dönüş riskini azaltacaktır. İnsan ömrü sınırlı olduğu için, sermayenin yahut malın kullanım hakkı konusunda insanlar arasındaki rekabetten dolayı, bir malın yahut sermayenin kullanım hakkını elde etmek bir nimettir. Bu yüzden, bugün elde bulunan bir miktar para her zaman için gelecekte bir zamanda elde olacak aynı miktar paradan daha değerlidir. Bu çalışmada iki temel prensipten yola çıkılmıştır. Büyük karlar her zaman küçük karlara tercih edilir ve erken fayda geç faydadan iyidir.

Aslında sınır tenörü optimizasyonu konusunda yaklaşımlar çeşitlidir. Özel teşebbüs genelde kar elde etme prensibiyle çalıştığı için, en yüksek karı veren yöntemleri tercih eder. Bu yüzden optimum sınır tenörü politikası sonucu, kari artırmak uğruna üretim miktarının azalması bir sorun teşkil etmez. Devletler ise, sadece karı değil, toplumsal faydayı da gözettiklerinden, karlı olanın yanı sıra istihdam yaratan ve maden kaynağını heba etmeden, maksimum kullanmayı gerektiren yöntemleri tercihe daha eğilimlidirler. Bu yüzden, toplumcu yahut devletçi bakış, daha az karlı olduğu halde, dinamik bir sınır tenörle politikası yerine, statik bir sınır tenörü uygulamasını tercih edebilirler.

Bu çalışmada amaç, sınır tenörü optimizasyonunun ancak azalarak değişen bir sınır tenörleri silsilesi ile mümkün olduğunu göstermektir. Bunun için, bir maden işletmesi örneği üzerinde dinamik programlama yöntemi uygulanmıştır.

2 DİNAMİK PROGRAMLAMA İLE OPTİMİZASYON

Dinamik programlama, bir dizi karar verme işlemini optimize eden bir matematik işlemleri bütünüdür. Temelde, dinamik programlama, problem çözümüne, problemin veya problemin bir kısmının parçalara bölünmesi ve bu parçaların çözümlenmesi, bu çözümlerin depolanması şeklinde bir problem çözüm yaklaşımı sunmaktadır. Bu çözümler, ihtiyaç duyulduğunda, yemden çözmek yerine, yeniden canlandırılmak suretiyle problemin genel çözümüne eklenerek, nihai çözüme ulaşılmaktadır.

Dinamik programlama, sistem analizi alanında yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir ve çok aşamalı karar verme problemlerinde optimal bir silsileye karar vermede kullanılabilir. Dinamik programlama, özellikle karar aşamasının zaman periyodunda silsile halinde olan problemlere çok uygundur. Periyotlar birbirine öyle bir bağla bağlıdır

ki bir zaman döneminde alınan kararlar sonraki karar verme aşamalarını etkilemektedir. Problem, alt problemlere bölünür ve her bir alt problem için optimal bir çözüm bulunur, n sayıda karar verme aşamalarına sahip bir problem, n sayıda ve her biri tek bir karar değişkenine sahip, problemlere bölünür. Hesaplama süresi, bir problem içindeki değişkenler sayısına eksponensiyel olarak büyürken, alt problemler sayısına doğrusal olarak büyür.

Bir problemin tümü sistem ve alt problemler de basamak olarak düşünülebilir. Dinamik programlamada basamaklar, genellikle, bir zaman aralığını temsil eder.

Bir sistemin her bir basamağında, problemin çözüm şanlarına karşılık gelen birden fazla durum vardır. Durumlar, tamamlanmamış çözümleri karakterize eder. Karar verici, her bir basamakta, o basamak için en iyi sonucu veren karar vermelidir. Bir karar, sistemi bir durumdan diğerine taşır. Bir sistemi bir durumdan diğerine taşıyan her bir aşamaya basamak denir.

Dinamik programlama genellikle geriye doğru, yani son durumdan ilk duruma doğru, bir işlemler silsilesi şeklinde uygulanır. Bu geriye doğru endükleme tekniği, son durumdan, bir önceki basamağın durumlarına doğru yapılır.

3 DİNAMİK PROGRAMLAMAMIN SINIR TENORU OPTİMİZASYONUNA UYGULANMASI

Dinamik programlama, sınır tenörü optimizasyonu (Dowd, 1976, Çetin, 2001), üretim planlaması (Dowd & Onur, 1992; Yun & Yegulalp, 1982), optimum ocak dizaynı (Learch & Grossmann, 1965) gibi madencilik problemlerine uygulanmıştır. Roman (1973), üretim miktarına karar vermede dinamik programlamayı kullanmış ve Dowd (1976), bunu sınır tenörü ve üretim miktarı tayinine uygulamıştır.

Dinamik programlama ile sınır tenörü optimizasyonu prensibi şu şekilde formüle edilebilir (Dowd, 1976):

$$R(x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n) = g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \dots +$$

$$g_n(x_n, y_n)$$

Burada,

R: toplam kar,

n: periyot,

x_n : n periyodunda rezerv miktarı,

y_n : n periyodunda tenor oranı,

g_n : n periyodunda kardır.

Burada amaç,

$$x_i \geq 0$$

$$\text{ve} \quad \sum_{i=1}^n x_i = x$$

x : toplam rezerv.

kısıtlamalarına bağlı olarak R karını maksimize etmektedir.

Bu maksimizasyon için temel fonksiyonel eşitlik şu şekilde formüle edilebilir:

$$f_n(x) = \max_{x_n, y_n} [g_n(x_n, y_n) + f_{n-1}(x - x_n)]$$

f_n : n periyot için kar.

Dinamik programlamanın sınır tenörü problemlerine uygulanmasını göstermek için faydalı olabilecek çok basit bir maden işletmesi örneği aşağıdadır:

İki farklı sınır tenöründe üretim yapılabilecek küçük ölçekli bir maden yatağı için maksimum üretim miktarı yılda 500 ton olsun. Düşük sınır tenörü kullanıldığında toplam cevher miktarı 4 000 ton olsun. Madenin yıllık maksimum üretim miktarı 500 ton olduğu için, yatak 8 yılda tükenecektir. Diğer yandan, yüksek sınır tenörü kullanılır ise 2 000 ton cevher üretilebilecek ve bahsi geçen maden yatağı 4 yılda tükenecektir. Düşük tenörlü cevherin satışından elde edilecek kar ton basma 10 TL ve yüksek tenörlü cevherin satışından elde edilecek kar ton basma 16 TL olsun. Yıllık indirgeme oranı %10 olarak kabul edilmiştir.

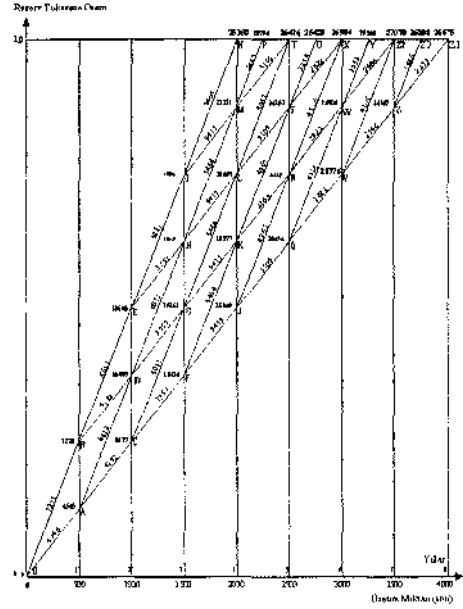
Burada yapılması gereken, maden yatağının tükenmesi sonunda maksimum net bugünkü değeri veren, her bir yılda hangi sınır tenörünün kullanılması kararına yönelik, sınır tenörü politikasının tespitidir. Muhtemel sınır tenörü kararları Şekil 1'de görülmektedir. Bu problem çok küçük ölçekli ve basitleştirilmiş olduğundan, şeklin de yardımıyla, basamak basamak problemin çözümü mümkündür.

Bu bir süresiz, deterministik, sonsuz horizonlu dinamik programlama örneğidir. Problemin doğası gereği bir başlangıç noktası, fakat bir çok vanaş noktalan vardır. Şeklin üst kısmındaki hat, yatağın tükenme durumunu göstermekte ve burada bir çok vanaş noktalan bulunmaktadır.

İki yıl için ya maden yatağında düşük sınır tenörü ile üretim yapılacak ve A noktası ile temsil edilen duruma gelinecek veya maden yatağında yüksek sınır tenörü ile üretim yapılacak ve B noktası ile temsil edilen duruma gelinecektir. Düşük sınır tenörü uygulanırsa, yatağın sekizde biri tüketilecek ve ilk yılın indirgenmiş kan 4 545 TL olacaktır. Ancak, yüksek sınır tenörü uygulanırsa yatağın dörtte biri tükenecek ve ilk yılın indirgenmiş karı 7 273 TL olacaktır. Sonuç olarak, şekildeki A noktasına 4 545 TL, B noktasına ise 7 273 TL değerini, bu noktalara varan en optimum değer olarak, tayin edebiliriz.

Hesaplamanın sonraki aşamasında, sistemin durumları C, D ve E noktalan ile gösterilmektedir. Bu noktalar için uygun değerler bulmak amacıyla O noktasından C noktasına, O noktasından D noktasına ve O noktasından E noktasına giden yollara bakmak gerekir. Ancak optimizasyon prensipleri gereği, hali hazırda A ve B noktalarına değerler atandığı için,

sadece o noktalardan C, D ve E noktalanna giden yollara bakmak yeterlidir.



Şekil 1. Karar Grafiği.

C noktası için sadece bir yol vardır ve o da OAC'dir. Sonuç olarak C noktasının optimal değeri 8 677 TL. Bu değer, A noktasının optimal değerine AC kararının eklenmesi ile bulunur. E noktası için de sadece bir yol vardır ve o da OBE'dir. Bu yüzden, E noktası için iki yılın optimum kar değeri, B noktasının optimal değerine BE kararının eklenmesi ile bulunan 13 885 TL'dir. D noktası için ise iki yol vardır: OAD ve OBD. OAD yolunun değeri 11 157 TL ve OBD yolunun değeri 11 405 TL'dir. Bunlar, A noktasının optimal değerine AD kararının eklenmesi ile ve B noktasının optimal değerine BD kararının eklenmesi ile bulunur. OBD yolu daha yüksek bir değer verir ve bu yüzden D durumu için iki yılın optimum kar değeri 11 405 TL olur. Üçüncü yıl için, O noktasından itibaren F, G, H ve I noktalarına ulaşan optimal kan bulmak için optimal yollar bulunur. Bunu yaparken, sadece bir önceki yılın optimal değerleri olan C, D ve E noktalarındaki değerler ve bu noktalardan başlayan yolların hesaba katılması yeterlidir. Şekildeki maden yatağının tükenmesini temsil eden üst çizgiye varıncaya kadar işlemler bu şekilde devam eder. Tüm işlemler sonunda, şekildeki üst çizgideki noktalarındaki değerler arasından en büyüğü maksimum karı verir. O nokta ZI noktasıdır. Aynı zamanda, maksimum kara götüren yol da optimal

yoldur. Optimal yol, geriye doğru takip edilerek kolaylıkla bulunur. Optimal yol OBDGKRWZ1, yani, ilk yıl için yüksek sınır tenorunu ve sonraki yıllar için düşük sınır tenorunu kullanmaktır. Bu yaklaşım sonunda, maksimum net bugünkü değer 27 070 TL olmakta ve maden yatağı 7 yıl sonunda tükenmektedir.

Şekilde görüldüğü gibi, yüksek sınır tenoru kullanıldığında da düşük sınır tenörü kullanıldığında da kar elde edilmektedir. Ancak görüldüğü gibi, düşük sınır tenörü kullanıldığında hem kar daha fazla, hem de üretim daha fazladır. Ancak, sabit bir sınır tenörü arayışı yerine, dinamik bir sınır tenörü politikası, daha yüksek kar elde etmenin mümkün olduğunu göstermektedir. Şeklin üst horizonunda görülen 9 ayrı indirgenmiş kar, 9 sınır tenörleri silsilesinin, dolayısıyla, 9 ayrı sınır tenörleri politikasının bulunduğu gösterir, işletmenin ilk yılında yüksek sınır tenörünü, sonraki yıllarda ise düşük sınır tenorunu kullanmak sonucunda en yüksek indirgenmiş karın elde edildiği şekilde görülmektedir. İkinci en yüksek indirgenmiş kar ise 26 984 TL ile OBEHLSX yolu, yani ilk iki yıl yüksek sınır tenorunun sonraki yıllarda düşük sınır tenorunun kullanıldığı yol vermektedir. Düşük sınır tenorunun sabit sınır tenörü olarak uygulanması işlemi, OACFJQVZZ3 yolu, ise, Tablo 1 'de de daha net görüldüğü gibi, en yüksek toplam indirgenmiş kar değerini verdiği halde, ancak üçüncü yüksek toplamı indirgenmiş kar değerini vermektedir.

Şekil 1'den rahatlıkla anlaşılacağı gibi, sistemin bütün basamaklarının her durumunda optimal değerler daima bir önceki basamağın durumlarının optimal değerlerini veren sınır tenorunun aynı veya düşük sınır tenörünü kullanmaktadır. Bu da bize optimumun her zaman için azalarak değişen sınır tenörleri politikasıyla mümkün olduğunu göstermektedir.

Tablo 1. Karar Tablosu, y, yüksek, d ise düşük sınır tenörü uygulamasını temsil eder.

maden ömrü (yıl)	sınır tenörleri (y-d)	üretim miktarı (ton)	toplam kar (TL)	toplam indirgenmiş kar (TL)
4	yyyy	2000	32000	25360
4,5	yydy	2250	33000	25794
5	yydd	2500	34000	26416
5,5	yyddy	2750	35000	26420
6	yyddd	3000	36000	26984
6,5	yddddy	3250	37000	26556
7	ydddd	3500	38000	27070
7,5	dddddy	3750	39000	26208
8	dddddd	4000	40000	26675

4 SONUÇLAR

Madencilik teşebbüslerinin nihai amacı kar elde etmektir. Ancak, amaç normal kar tanımından daha geniş tarif edilebilir. Hükümetlerin mesela istihdamı artırmak, ekonomik gelişmeyi motive etmek gibi hedefleri olabilir; her ne kadar tüm bu hedefler, ne kadar vasıtalı olsa da, nihayetinde kar üretimi olarak görülebilse de. Bu çalışmada amaç, net bugünkü değer finalisai değerlendirme tekniği olarak kullanılarak, cevheri mümkün olan en yüksek kar elde ederek işletme hedefine ulaşmaktır.

Maksimum net bugünkü değer ancak azalarak değişen sınır tenörleri politikası ile mümkün olduğu bu çalışmada gösterilmiştir. Madencilik operasyonu, görece yüksek bir sınır tenörü ile başlamalı ve madenin ömrü boyunca kademeli olarak azaltılmalıdır.

Bu çalışmada sadece sınır tenörleri politikası belirleme amacıyla net bugünkü değer hesabı yapılmıştır. Bir maden işletmesinin gerçek bir işletme projesi için elbette maden yatağının mineralizasyon dağılımı, maden yatağından ve üretim yönteminden kaynaklanan fiziksel kısıtlamalar hesaba katılmalıdır. Bu, tabiidir ki, optimizasyon işlemini daha karmaşık ve hesap yoğun bir hale getirecektir. Ancak bu durum, sınır tenörü optimizasyonunun üretim aşamaları boyunca azalarak değişen bir sınır tenörleri silsilesi ile mümkün olduğu gerçeğim gölgelemez.

5 KAYNAKLAR

- Çetin, E 2001. Optimisation of Cut-off Grades for Multi-mineral Deposits. PhD Thesis. University of Leeds. United Kingdom.
- Cetin, E and Dowd, P A 2002. The Use of Genetic Algorithms for Multiple Cut-off Grade Optimisation. Proceedings of 30th Symposium on Applications of Computer and Operations Research in the Mineral Industry, pp 769-779.
- Dowd, P A 1976. Application of Dynamic and Stochastic Programming to Optimize Cut-off Grades and Production Rates. Trans Instn Min Metal, vol 85. pp A22-31.
- Dowd, P A and Onur, A H 1992. Optimising Open Pit Design and Sequencing. Proceedings of 23rd Symposium on Applications of Computer and Operations Research in the Mineral Industry, pp 411-422.
- Henning, U L F 1963. Calculation of Cut-off Grade. Canadian Mining Journal, vol 84. pp54-57
- Lane, K F 1964. Choosing the optimum cut-off grade. Colorado School of Mines Quarterly, vol 59. pp 811-829.
- Lane, K F 1988. The Economic Definition of Ore. London: Mining Journals Boks Ltd.

- Lerchs, H and Grossmann, I F 1965. Optimum design of open pit mines. CIM Bulletin, vol 58. pp 47-54.
- Roman, R J 1973. The Use of Dynamic Programming for Determining Mine-mill Production Schedules. Proceedings of 10* Symposium on applications of computer and operations research in the mineral industry, pp 165-170.
- Taylor H K 1972. General background theory of Cut-off Grades. Trans Instn Min Metall, vol 81. ppA160-A179.
- Taylor H K 1985. Cut-off Grades - some further reflections Trans Instn Min Metall vol 96. pp A204-A216.
- Yun, Q and Yegualp, T 1982. Optimum scheduling of overburden removal in open pit mines. CIM Bulletin, vol 75. no 848. pp 80-83.

